



Piergiorgio Odifreddi

L'enigma di Poincaré

da G.G. Szpiro, *L'enigma di Poincaré. La congettura e la misteriosa storia del matematico che l'ha dimostrata*, Apogeo, Milano 2008.

Piergiorgio Odifreddi è l'autore della *Prefazione* a un libro di George G. Szpiro che ricostruisce la storia della congettura formulata dal matematico francese Henri Poincaré nel 1904. Nelle pagine che introducono l'opera, Odifreddi ripercorre la geniale intuizione dantesca del paradiso.

Prima di immergersi nel libro di Szpiro il lettore può intuire la formulazione del problema risolto da Perelman ricordando che quando Dante guarda il Paradiso dalla Terra vede i cieli come una serie di sfere crescenti, che raggiungono un massimo nel Primo Mobile. Per guardare oltre viene accompagnato da Beatrice all'Empireo, dove vede le sedi angeliche come una serie di sfere decrescenti, che raggiungono un minimo in un punto abbagliante, che è Dio. Beatrice spiega paradossalmente che in realtà quel punto è la sfera maggiore, e racchiude tutto ciò che sembra racchiuderlo: l'universo dantesco si compone dunque di due serie di sfere distinte, una sensibile e crescente e l'altra celeste e decrescente, i cui centri sono rispettivamente la Terra e Dio.

Questa complicata struttura richiama le antiche rappresentazioni cartografiche della Terra mediante due serie di cerchi concentrici, centrati rispettivamente nei due poli. Chi guardasse la Terra dal Polo Sud vedrebbe infatti, come Dante, una serie di cerchi crescenti corrispondenti ai paralleli dell'emisfero meridionale, che raggiungono un massimo all'Equatore. Recatosi su questo, vedrebbe poi i paralleli dell'emisfero settentrionale come una serie di cerchi decrescenti, che raggiungono un minimo nel Polo Nord. Se però la Terra si aprisse come un fiore, i paralleli settentrionali circonderebbero quelli meridionali, e il Polo Nord si dispiegherebbe intorno a tutto.

La rappresentazione cartografica non è che un modo per rappresentare la superficie sferica della Terra sulla superficie piatta di un foglio, e renderla indirettamente comprensibile a esseri bidimensionali che non fossero in grado di percepire direttamente la sua sfericità nello spazio tridimensionale. Analogamente, la rappresentazione dantesca del Paradiso non è che un modo per rappresentare nello spazio tridimensionale la superficie di una *ipersfera*, cioè di una sfera a tre dimensioni immersa nello spazio a quattro dimensioni, e renderla indirettamente comprensibile a esseri tridimensionali come noi, che non siamo in grado di percepire direttamente una quarta dimensione spaziale.

Dante ha dunque proceduto per analogia, inventando più o meno consciamente un'ipersfera tridimensionale che sta alla sfera bidimensionale come questa sta al cerchio unidimensionale. Una bella intuizione, che anticipa di secoli l'analogia invenzione letteraria del delizioso romanzo dell'Ottocento *Flatlandia* di Edwin Abbott, che offre un'introduzione indolore alla geometria multidimensionale.

Dire che la struttura del Paradiso dantesco è un'ipersfera non è però una risposta alla domanda iniziale, ma solo una sua riformulazione: il vero problema matematico è come si possa caratterizzare l'ipersfera tra le altre superfici tridimensionali dello spazio a quattro dimensioni. Nel 1904 il matematico francese Henri Poincaré propose una soluzione in una nota a un suo lavoro, procedendo anch'egli come Dante: ovvero, per analogia col caso della sfera o, se si preferisce, della Terra.

Naturalmente, l'essenza della Terra non è di essere più o meno schiacciata ai poli, bensì di avere una forma più o meno sferica e non, ad esempio, a ciambella (per lo meno, di una riuscita col buco). Interessarsi dell'essenza e disinteressarsi del 'più o meno' è la caratteristica della cosiddetta *topologia*, 'scienza dei luoghi'. E dal punto di vista topologico la Terra è caratterizzata dal fatto di essere l'unica superficie chiusa sulla quale i girotondi di persone si possono contrarre senza rompersi, fino a concentrarsi in un solo punto: se la Terra fosse fatta non come un pallone ma come un salvagente, i girotondi che girassero attorno al buco o attorno al salvagente non potrebbero contrarsi oltre un certo limite, così come nella vita reale non si potrebbe contrarre un girotondo che girasse intorno a un lago o a un palazzo. Poincaré congetturò che la stessa cosa valesse anche per l'ipersfera: in altre parole, che il Paradiso fosse l'unica superficie tridimensionale per la quale tutti i girotondi di angeli si possono contrarre senza rompersi.